

ANEXO I Teoría Elemental de Grafos

En este acápite se aporta la noción de grafo y de sus partes componentes de una forma informal y operativa sin pretensión de rigurosidad y tratando de que sea fácilmente comprensible. El lector interesado en un tratamiento más profundo de estos temas puede consultar las obras: 5, 31, 38, 46, 50, 54, 83, 86 en la lista de referencias. Es conveniente destacar que el uso de un lenguaje excesivamente formal, a menudo sólo sirve para oscurecer las ideas básicas, y es una dificultad adicional para el científico que trabaja en disciplinas no matemáticas. Por tanto, se ha adoptado en este aspecto el punto de vista de que es preferible que se entiendan claramente los hechos fundamentales, aunque se pierda el rigor matemático (Scolnik).

DEFINICIONES Y EJEMPLOS

Elementos. Cuando se habla de un grafo se tiene en mente un conjunto de **elementos** o **nodos**, en un problema concreto, los cuales pueden ser la expresión de una gran variedad de componentes, puede tratarse de un conjunto de individuos, las organizaciones políticas o de masas, las redes de la infraestructura social, regiones económicas, ciudades, sistemas de centros, etcétera.

Relaciones. Por otro lado se tiene a la vez, un conjunto de líneas de relación o arcos que vinculan pares de los elementos, anteriormente mencionados, en el campo de un determinado problema, ejemplos concretos pueden ser desde una relación de dominancia, rutas de comunicación interurbana, hasta un diagrama decisional, etcétera.

Sobre esta base, se adelanta una definición de grafo: **Grafo.** Se denomina grafo (G) a toda representación gráfica constituida por un conjunto no vacío (V) puntos, nombrados elementos (puntos, nodos, vértices) del grafo y por un conjunto no vacío de (E) líneas provistas o no de orientación que respectivamente

se denominan arcos o aristas (la ausencia de orientación puede ser interpretada como una doble orientación) que vinculan o conectan, cada una de ellas, dos vértices.

Tanto los vértices o nodos como los arcos se consideran finitos.

Ejemplo: La figura representa el mapa de la red vial (carreteras) que unen entre sí el sistema de ciudades de la región oriental de Cuba.

A la dicha representación geográfica se le somete a una transformación topológica (consultar referencia 69).

La estructura topológica de una red implica la reducción del mapa o esquema de canales de índole diversa a una representación lo más elemental posible (ver figura 9A.2).

La figura (b) muestra la reducción topológica de una red de carreteras, figura (a) a un sistema de nodos ($V_1 - V_7$) y arcos ($E_1 - E_6$).

Lo fundamental de la reducción de una red a un grafo, es mantener la estructura de interconexiones entre los nodos y los arcos, como se muestra en la figura 9A.2, en la cual están representadas tres formas diferentes de una misma estructura (a) (b) y (c).

MEDIDAS TEÓRICAS ELEMENTALES

Una de las aplicaciones más simples de la Teoría de los Grafos, radica en su empleo, en la comparación de redes mediante la reducción topológica de la misma a un grafo y por la selección de tres medidas (índices) básicas.

Las medidas o índices son: número de grafos separados (no conectados) en la red (G), número de arcos en la misma (E) y número de vértices (V).

En la figura 9.4 se muestran cuatro redes independientes, en las cuales el número de subgrafos ($G = 1$) y el número de vértices ($V = 10$) se mantienen constantes, incrementándose únicamente el número de arcos sucesivamente (ver figura 9A.3.)

Una rápida comparación visual simplemente de los cuatro grafos, muestra que la red deviene sucesivamente más conectada mediante la secuencia: a, b, c, d.

Para el análisis de la complejidad de los grafos (consecuentemente de las redes iniciales) cuantitativamente se utilizan los índices del cuadro 9A.1 (medidas topológicas elementales de la estructura de un grafo [red]).



Fig. 9.A.1

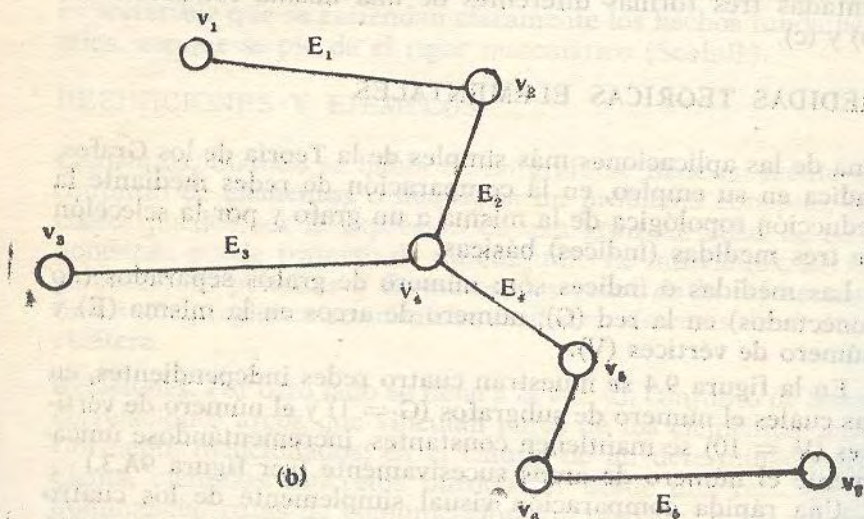


Fig. 9.A.1

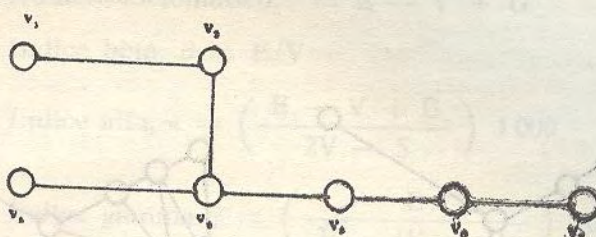


Fig. 9.A.2 (a)

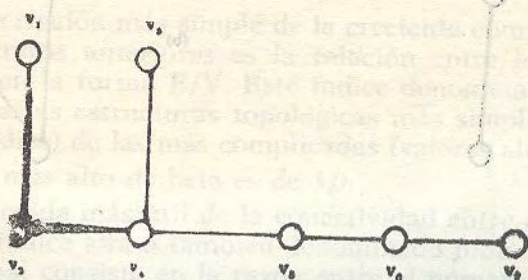


Fig. 9.A.2 (b)

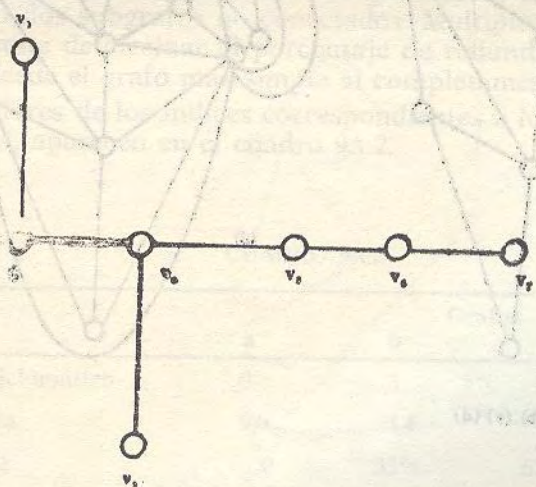


Fig. 9.A.2 (c)

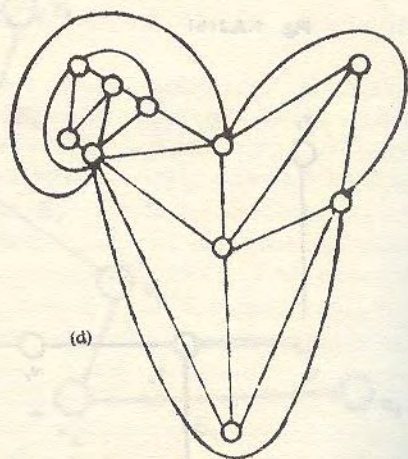
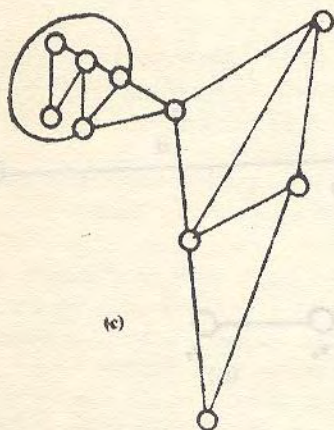
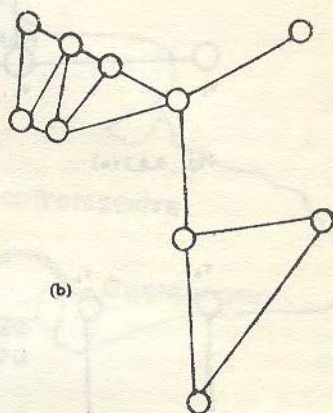
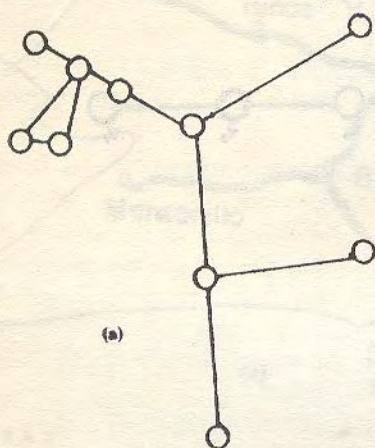


Fig. 9.A-3 (a) (b) (c) (d)

- 1 Número ciclomático, $= E - V + G$
- 2 Índice beta, $\beta = E/V$
- 3 Índice alfa, $\alpha = \left(\frac{E - V + G}{2V - 5} \right) 1000$
- 4 Índice gamma $\gamma = \left(\frac{E}{V - (V - 1)} \right) 100$

La descripción más simple de la creciente complejidad de los cuatro grafos anteriores es la relación entre los arcos y los vértices en la forma E/V . Este índice denominado índice beta diferencia las estructuras topológicas más simples (valores bajos de índice) de las más complicadas (valores altos del índice). El valor más alto de beta es de 3,0.

Una medida más útil de la conectividad entre redes lo representa el índice alfa o también denominado índice de redundancia, el cual consiste en la razón entre el número observado de circuitos fundamentales y el número máximo posible de circuitos representado por el denominador $2V-5$.

El grafo elemental (denominado árbol) es el de mayor valor de alfa, en el cual suprimiendo cualquier arco, el grafo se subdivide en dos subgrafos no conectados. Multiplicando alfa por 100, permite determinar el porcentaje de redundancia, de cero a cien, desde el grafo más simple al completamente conectado.

Los valores de los índices correspondientes a los grafos de la figura 9.4, aparecen en el cuadro 9A.2.

CUADRO 9A.2

Índice	Grafos			
	a	b	c	d
Número ciclomático	0	5	10	15
Índice beta	9,0	1,4	1,9	2,4
Índice alfa	0	33%	67%	100%
Índice gamma	37%	58%	79%	100%

ALGUNOS TIPOS DE GRAFOS

A continuación se exponen las definiciones de ciertos tipos de grafos, cuyas características resulta necesario exponer (en este acápite se definen dos tipos, el resto se definirá más adelante). Esto no agota todos los tipos, sino que solamente se tratan los más necesarios.

Grafo completo. Se denomina grafo completo aquel en el que entre todo par de vértices existe al menos un arco (a). En la figura 9A.4 (b) representa un grafo incompleto, falta el arco que relaciona V_1 con V_5 .

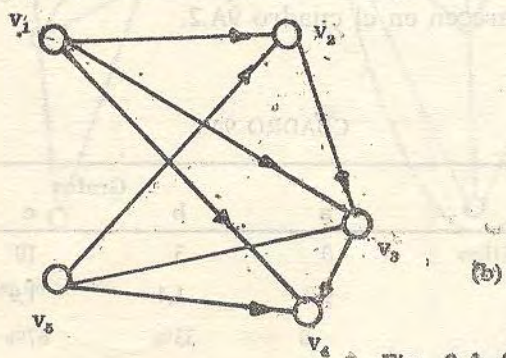
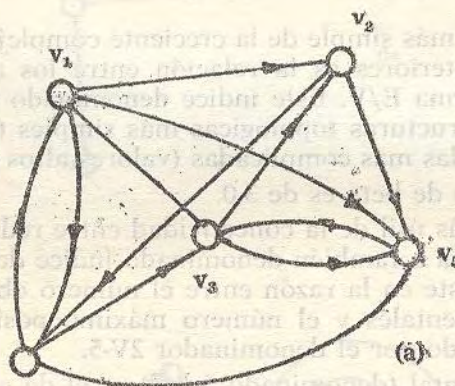


Fig. 9.A.4

Grafo Simétrico: Es aquel que puede poseer pares de vértices no vinculados mediante arcos (no se exige que sea completo); pero es condición de que siempre que exista un arco (E_i, E_j) también deberá existir un arco opuesto).

El grafo de la figura 9A.5 (a) es simétrico; pero el 9A.5 (b) no lo es,

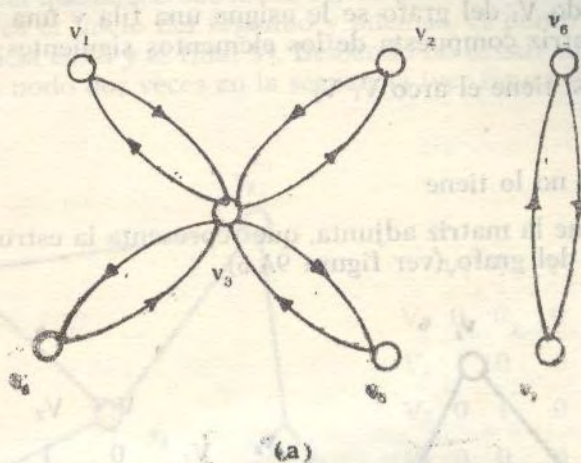
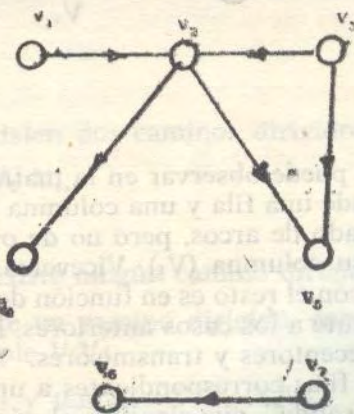


Fig. 9A.5



(Como se señaló anteriormente en el capítulo 8, se definirán otros tipos de grafos, cuando se hayan determinado una serie de conceptos que intervienen en sus definiciones.)

REPRESENTACIÓN MATRICIAL DE UN GRAFO

A todo grafo se encuentra asociada una matriz y viceversa; si a cada nodo V_i del grafo se le asigna una fila y una columna de una matriz compuesta de los elementos siguientes:

1, si tiene el arco $V_i V_j$

$A_{ij} =$

0, si no lo tiene

Se obtiene la matriz adjunta, que representa la estructura de relaciones del grafo (ver figura 9A.6).

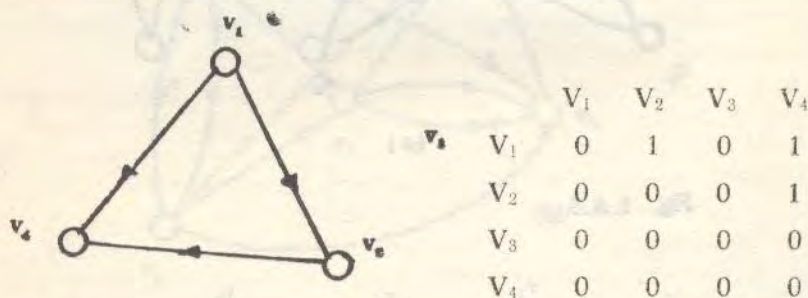


Fig. 9A.6:

Observaciones: Se puede observar en la matriz que a los nodos aislados corresponde una fila y una columna nula (V_3). Cuando un nodo es destinado de arcos, pero no de origen, su fila será nula, aunque no su columna (V_4). Viceversa para nodos cuya única vinculación con el resto es en función de orígenes de arcos (V_1). Respectivamente a los casos anteriores, los nodos se denominan: aislados, receptores y transmisores.

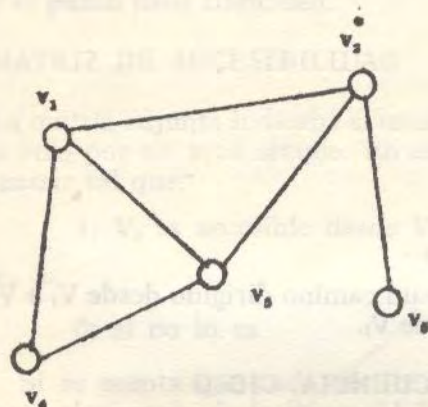
Si se suman las filas correspondientes a un elemento, se obtiene el "grado de salida", que significa el número de arcos originados en dicho nodo. En el ejemplo, 2 para V_1 y 1 para V_2 , cero para los demás; sumando columnas se obtiene el "grado de entrada", el cual indica el número de arcos que terminan en cada nodo: 2 para V_4 y 1 para V_2 , el resto cero.

CAMINOS DIRIGIDOS

Se denomina camino dirigido de V_i a V_j , al conjunto ordenado de arcos:

$$V_i V_1, V_1 V_k \dots, V_r V_t, V_t V_j$$

es decir, tal que dados dos arcos consecutivos el vértice final del primero es el inicio del segundo y además, el punto inicial de la secuencia es V_i y el final V_j . Debiendo no existir ningún arco o ningún nodo dos veces en la secuencia (ver figura 9A.7).



	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
V_1	0	0	0	1	1
V_2	1	0	0	0	0
V_3	0	1	0	0	0
V_4	0	0	0	0	1
V_5	0	1	0	0	0

Fig. 9A.7

Para $V_1 V_2$ — existen dos caminos dirigidos:

$V_1 V_4, V_4 V_5, V_5 V_2$,

$V_1 V_5, V_5 V_2$

para $V_1 V_3$ — no existe ningún camino dirigido.

para $V_1 V_4$ — existe un camino dirigido, consistente en el arco simple $V_1 V_4$.

para $V_1 V_5$ — $V_1 V_5$ y también $V_1 V_4, V_4 V_5$.

para $V_2 V_1$ — $V_2 V_1$.

para $V_2 V_3$ — no existe.

para $V_2 V_4$ — $V_2 V_1, V_1 V_4$.

para $V_2V_5 - V_2V_1, V_1V_5$ y V_2V_1, V_1V_4, V_4V_5

para V_3V_1, V_3V_2, V_2V_1

para $V_3V_2 - V_3V_2$.

para $V_3V_4, V_3V_2, V_2V_1, V_1V_4$

para $V_3V_5 - V_3V_2, V_2V_1, V_1V_5$ y $V_3V_2, V_2V_1, V_1V_4, V_4V_5$.

para $V_4V_1 - V_4V_5, V_5V_2, V_2V_1$.

para $V_4V_2 - V_4V_5, V_5V_2$.

para V_4V_3 — no existe.

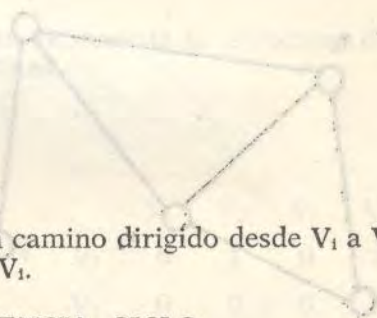
para $V_4V_5 - V_4V_5$.

para $V_5V_1 - V_5V_2, V_2V_1$

para $V_5V_2 - V_5V_2$.

para V_5V_3 — no existe.

para $V_5V_4 - V_5V_2, V_2V_1, V_1V_4$.



Cuando existe por lo menos un camino dirigido desde V_i a V_j se dice que V_j es accesible desde V_i .

LONGITUD, DISTANCIA, SECUENCIA, CICLO

Longitud: La longitud de V_i a V_j es un camino entre ellos de longitud mínima, así en el ejemplo anterior (9A.7) la longitud de V_2 a V_5 es V_2, V_1, V_5 , es decir de longitud 2.

Distancia: La distancia de V_i a V_j , está dada por la longitud entre V_i, V_j , obsérvese que la distancia entre V_i y V_j no necesariamente debe ser igual a la distancia entre $V_j - V_i$. Por ejemplo:

$$d(V_4V_5) = 1$$

$$d(V_5V_4) = 3$$

Si no existe camino entre V_i y V_j , convendrá en que:

$$d(V_iV_j) = \infty$$

La distancia de V_i a V_i se convendrá en que:

$$d(V_iV_i) = 0$$

Secuencia: Al definir un camino dirigido se convino en que ningún arco, ni ningún nodo se repitiera. Si se obvia esta res-

tricción, se llega al concepto de secuencia. Por ejemplo, en el grafo de la figura 9I.7 se tiene:

$V_3V_2 V_2V_1, V_1V_5, V_5V_2, V_2V_1 V_1V_4.$

se una secuencia de V_3 a V_4 , pero no es un camino (dado que se repite $V_2 V_1$), si bien toda secuencia encierra un camino.

Secuencia abierta: Una secuencia se denomina abierta, si el nodo inicial V_i y el nodo final V_j , son distintos; contrariamente será cerrado cuando $V_i = V_j$.

Ciclo: El ciclo está dado por un camino donde el punto inicial y el punto final coinciden.

MATRIZ DE ACCESIBILIDAD

La matriz adjunta indicaba si un nodo se encontraba o no unido a otro por un arco simple. En esta ocasión se construirá una matriz tal que:

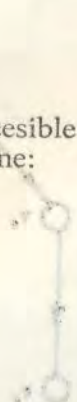
1; V_j es accesible desde V_i

$r_{ij} =$

0; si no lo es

Si se acepta que cada vértice es accesible desde sí mismo, para el ejemplo de la figura 9A.7 se tiene:

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
V_1	1	1	0	1	1
V_2	1	1	0	1	1
V_3	1	1	1	1	1
V_4	1	1	0	1	1
V_5	1	1	0	1	1



Observaciones: Cuando una fila es unitaria, indica que el nodo correspondiente tiene acceso a los demás nodos (V_3).

— Cuando una fila es nula, salvo el elemento r_{ii} , indica que el nodo correspondiente no tiene acceso a ningún otro nodo.

— Cuando una columna es unitaria, el nodo correspondiente será accesible desde cualquier otro nodo. Cuando sea nula, salvo en el elemento r_{jj} , indicará que el nodo es inaccesible.

— Obsérvese que la relación de accesibilidad es transitiva, o sea, si V_j es accesible desde V_k , y V_k accesible desde V_i , entonces V_j es accesible desde V_i .

OTROS TIPOS DE GRAFOS

Otros tipos de grafos son los siguientes:

Grafo fuertemente conexo: Cuando dos nodos cualquiera de un mismo grafo son mutuamente accesibles, ello implica que la matriz de accesibilidad correspondiente deberá estar formada exclusivamente por elementos unitarios. Por definición se establece que un grafo con un solo vértice es fuertemente conexo.

Unilateralmente conexo: (o parcialmente conectado): Cuando para dos nodos cualquiera por lo menos uno es accesible para el otro.

Grafo débilmente conexo: Cuando dos nodos cualquiera están unidos, aun cuando pueden ser mutuamente inaccesibles. Dos nodos están unidos, cuando se encuentran involucrados en dos secuencias que tienen por lo mismo un punto en común.

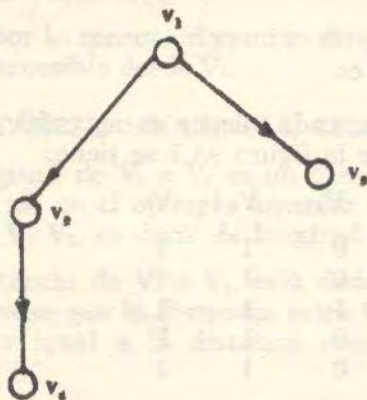


Fig. 9.A.8

SUBGRAFOS

Los diversos grafos de conectividad pueden utilizarse como criterios para la identificación de subgrafos significativos. Por ejemplo, si se desea determinar subgrafos de máxima conectividad, mediante el reordenamiento de filas y columnas de la

matriz de accesibilidad, se toma el ejemplo anterior, y se obtiene:

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
V_1	1	1	1	1	0
V_2	1	1	1	1	0
V_4	1	1	1	1	0
V_5	1	1	1	1	0
V_3	1	1	1	1	1

el subgrafo de nodos V_1, V_2, V_4, V_5 , es fuertemente conexo.